

## 10.1

Kun korko lisättiin vuosittain pääomaan, talletuksen arvo tuli aina kerrotuksi samalla muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Talletuksen arvo tuli siis joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Kun talletus oli ollut pankissa vuoden, sen arvo oli  $q \cdot 4500$  €.

Kun talletus oli ollut pankissa kaksi vuotta, sen arvo oli  
 $q \cdot q \cdot 4500 \text{ €} = q^2 \cdot 4500 \text{ €}.$

$\vdots$

Kun talletus oli ollut pankissa kuusi vuotta, sen arvo oli  $q^6 \cdot 4500$  €.

Toisaalta talletuksen arvo oli kuuden vuoden jälkeen 5400 euroa.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^6 \cdot 4500 = 5400$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$q \approx -1,031 \text{ tai } q \approx 1,031$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,031$ .

Talletuksen arvo siis tuli joka vuosi 1,031-kertaiseksi, joten talletuksen arvo oli vuoden lopussa 103,1 % edellisen vuoden lopun arvosta.

Tilin vuosikorko oli  $103,1 \% - 100 \% = 3,1 \%$ .

**Vastaus**

3,1 %

## 10.2

Kun palkka kasvoi vuosittain, alkuperäinen palkka tuli aina kerrotuksi muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Palkka kasvoi siis joka vuosi keskimäärin  $q$ -kertaiseksi.

Palkka oli aluksi 2997 € ja viiden vuoden jälkeen  $q^5 \cdot 2997$  €.

Toisaalta viiden vuoden jälkeen palkka on 3203 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot 2997 = 3203$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx 1,013$$

Palkka tulee joka vuosi 1,013.-kertaiseksi, joten se on vuoden lopussa . 101,3 % . edellisen vuoden lopun arvosta.

Palkka kasvoi keskimäärin  $101,3 \% - 100 \% = 1,3 \%$ .

### Vastaus

1,3 % .

## 10.3

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Sairauspoissaolojen määrä tulee joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Ensimmäisenä vuonna sairauspoissaolojen määrä on 8912 päivää ja kuuden vuoden kuluttua  $q^6 \cdot 8912$  päivää.

Kuuden vuoden kuluttua määrän tulee olla 6000 päivää. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^6 \cdot 8912 = 6000 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx -0,936 \text{ tai } q \approx 0,936$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,936$ .

Sairauspoissaolojen määrä tulee joka vuosi 0,936-kertaiseksi, joten määrä on aina 93,6 % edellisen vuoden määrästä.

Sairauspoissaolojen vuotuisen vähennyksen tulee olla  $100 \% - 93,6 \% = 6,4 \%$ .

**Vastaus**

6,4 %

## 10.4

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Henkilöstön määrä tuli joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Ensimmäisenä vuonna henkilöstön määrä oli 5120 ja kolmen vuoden kuluttua  $q^3 \cdot 5120$  henkilöä.

Toisaalta kuuden vuoden kuluttua määrä on 3920 henkilöä.  
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^3 \cdot 5120 = 3920$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q \approx 0,915$$

Henkilöstön määrä tuli joka vuosi 0,915-kertaiseksi, joten määrä oli aina 91,5 % edellisen vuoden määrästä.

Henkilöstön vuotuinen vähennys oli  $100 \% - 91,5 \% = 8,5 \%$ .

**Vastaus**

8,5 %

## 10.5

Merkitään rikkipäästöjen määrää alussa kirjaimella  $a$  ja vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Rikkipäästöjen määrä tulee joka vuosi  $q$  - kertaiseksi, joten kymmenen vuoden päästä määrä on  $q^{10} \cdot a$ .

Tavoitteena on, että rikkipäästöjen määrä vähenee kymmenessä vuodessa 90 %. Määrän tulee siis olla 10 % lähtötasosta  $a$  eli  $0,1a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{10} \cdot a = 0,1a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx -0,794 \text{ tai } q \approx 0,794$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,794$ .

Rikkipäästöjen määrä tulee joka vuosi 0,794 -kertaiseksi, joten määrä on aina 79,4 % edellisen vuoden määrästä.

Rikkipäästöjen määrän tulee vähentyä vuodessa keskimäärin  $100 \% - 79,4 \% = 20,6 \%$ .

**Vastaus**

20,6 %

## 10.6

Merkitään palkkojen määrää alussa kirjaimella  $a$  ja vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Palkkojen määrä tulee joka vuosi  $q$  -kertaiseksi, joten viiden vuoden päästä määrä on  $q^5 \cdot a$ .

Tavoitteena on, että palkat nousevat viidessä vuodessa 30 %. Määrän tulee siis olla 130 % lähtötasosta  $a$  eli  $1,3a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot a = 1,3a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx 1,054$$

Palkat tulevat joka vuosi 1,054-kertaiseksi, joten määrä on aina 105,4 % edellisen vuoden määrästä.

Palkkojen tulee nousta vuodessa keskimäärin  $105,4 \% - 100 \% = 5,4 \%$ .

**Vastaus**

5,4 %

## 10.7

Kun hinta laski kuukausittain, alkuperäinen hinta tuli aina kerrotuksi muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Hinta tuli siis joka kuukausi keskimäärin  $q$  -kertaiseksi.

Hinta oli aluksi 422 € ja kuuden kuukauden jälkeen  $q^6 \cdot 422$  €.

Toisaalta kuuden kuukauden jälkeen hinta on 211 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^6 \cdot 422 = 211 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx -0,891 \text{ tai } q \approx 0,891$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,891$ .

Hinta siis tuli joka kuukausi 0,891-kertaiseksi, joten se oli kuun lopussa 89,1 % edellisen kuukauden lopun arvosta.

Hinta laski kuukaudessa keskimäärin  $100 \% - 89,1 \% = 10,9 \%$ .

**Vastaus**

10,9 %

## 10.8

Merkitään kofeiinin määrää alussa kirjaimella  $a$  ja muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Kofeiinin määrä elimistössä tulee joka tunti  $q$ -kertaiseksi, joten määrä on viiden tunnin jälkeen  $q^5 \cdot a$ .

Viiden tunnin jälkeen määrän on oltava puolet alkuperäisestä määrästä, eli  $0,5a$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot a = 0,5a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx 0,87$$

Kofeiinin määrä tulee joka tunti  $0,87$ -kertaiseksi, joten se on tunnin lopussa  $87\%$  edellisen tunnin lopun arvosta.

Kofeiinin määrä elimistössä vähenee yhdessä tunnissa  
 $100\% - 87\% = 13\%$ .

**Vastaus**

$13\%$

## 10.9

Merkitään Marjaleenan etäisyyttä Auringosta kirjaimella  $x$  (km).

Muodostetaan annetuista tiedoista taulukko.

Kiertoaika (v)	Etäisyys Auringosta (km)
5,22	$x$
1	$1,50 \cdot 10^8$

Keplerin lain mukaan kiertoajan neliö on suoraan verrannollinen Auringosta mitatun etäisyyden kuutioon. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

$$\frac{5,22^2}{1^2} = \frac{x^3}{(1,50 \cdot 10^8)^3}$$
$$x \approx 4,51 \cdot 10^8$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Marjaleenan etäisyys Auringosta on  $4,51 \cdot 10^8$  km.

**Vastaus**

$4,51 \cdot 10^8$  km

## 10.10

Kun tuotto lisätään vuosittain sijoitukseen, sen arvo tulee aina kerrotuksi samalla muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Sijoituksen arvo tulee siis joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Vuoden jälkeen sijoituksen arvo on  $q \cdot 10\,000$  €.

Kahden vuoden jälkeen sen arvo on  $q \cdot q \cdot 10\,000 \text{ €} = q^2 \cdot 10\,000 \text{ €}$ .

⋮

Viiden vuoden jälkeen sijoituksen arvo on  $q^5 \cdot 10\,000$  €.

Sijoituksen arvon on oltava viiden vuoden jälkeen 15 000 euroa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$\begin{aligned} q^5 \cdot 10\,000 &= 15\,000 \\ q &\approx 1,084 \end{aligned}$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

Sijoituksen arvo siis tulee joka vuosi 1,084-kertaiseksi, joten sen arvo on vuoden lopussa 108,4 % edellisen vuoden lopun arvosta.

Vuotuisen tuoton tulee olla  $108,4 \% - 100 \% = 8,4 \%$ .

**Vastaus**

8,4 %

## 10.11

Kun taulun arvo kasvaa vuosittain, alkuperäinen arvo tulee aina kerrotuksi muutoskerroimella. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Taulun arvo kasvaa siis joka vuosi keskimäärin  $q$ -kertaiseksi.

Taulun arvo oli aluksi 1300 € ja kahdeksan vuoden jälkeen  $q^8 \cdot 1300$  €.

Kahdeksan vuoden jälkeen taulun arvo on 2800 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^8 \cdot 1300 = 2800$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$$q \approx -1,101 \text{ tai } q \approx 1,101$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,101$ .

Taulun arvo siis tuli joka vuosi 1,101-kertaiseksi, joten se oli vuoden lopussa 110,1 % edellisen vuoden lopun arvosta.

Taulun arvo kasvoi keskimäärin  $110,1 \% - 100 \% = 10,1 \%$ .

### Vastaus

10,1 %

## 10.12

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Auton arvo tuli joka vuosi  $q$  -kertaiseksi.

Ensimmäisenä vuonna Mikaelin auton arvo oli 33 000 euroa ja viiden vuoden kuluttua  $q^5 \cdot 33\,000$  euroa.

Toisaalta viiden vuoden kuluttua arvo oli 17 500 euroa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot 33\,000 = 17\,500 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 0,881$$

Auton arvo tuli joka vuosi 0,881-kertaiseksi, joten arvo vuoden lopussa on aina 88,1 % edellisen vuoden lopun arvosta.

Auton arvo aleni vuosittain keskimäärin  $100\% - 88,1\% = 11,9\%$ .

**Vastaus**

11,9 %

## 10.13

Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Suomessa asuvien alle 15-vuotiaiden lukumäärä tuli siis joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

- a) Vuonna 1980 alle 15-vuotiaita oli 965 209 ja vuonna 2000, eli 20 vuoden kuluttua, määrä oli  $q^{20} \cdot 965\,209$ .

Toisaalta vuonna 2000 alle 15-vuotiaita oli 936 333. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{20} \cdot 965\,209 = 936\,333 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 0,9985 \text{ tai } q \approx -0,9985$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 0,9985$ .

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä tuli joka vuosi 0,9985-kertaiseksi, joten määrä vuoden lopussa on aina 99,85 % edellisen vuoden lopun määrästä.

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä väheni vuosien 1980 ja 2000 välisenä aikana vuosittain keskimäärin  $100\% - 99,85\% = 0,15\%$ .

- b) Vuonna 2000 alle 15-vuotiaita oli 936 333 ja vuonna 2019, eli 19 vuoden kuluttua, määrä oli  $q^{19} \cdot 936\,333$ .

Toisaalta vuonna 2019 alle 15-vuotiaita oli 871 036. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{19} \cdot 936\,333 = 871\,036 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 0,9962$$

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä tuli joka vuosi 0,9962 -kertaiseksi, joten määrä vuoden lopussa on aina 99,62 % edellisen vuoden lopun määrästä.

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä väheni vuosien 2000 ja 2019 välisenä aikana vuosittain keskimäärin  $100\% - 99,62\% = 0,38\%$ .

- c) Vuonna 1980 alle 15-vuotiaita oli 965 209 ja vuonna 2019, eli 39 vuoden kuluttua, määrä oli  $q^{39} \cdot 965\,209$ .

Toisaalta vuonna 2019 alle 15-vuotiaita oli 871 036. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{39} \cdot 965\,209 = 871\,036 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 0,9974$$

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä tuli joka vuosi 0,9974 -kertaiseksi, joten määrä vuoden lopussa on aina 99,74 % edellisen vuoden lopun määrästä.

Alle 15-vuotiaiden lukumäärä väheni vuosien 1980 ja 2019 välisenä aikana vuosittain keskimäärin  $100\% - 99,74\% = 0,26\%$ .

### Vastaus

- a) 0,15 %
- b) 0,38 %
- c) 0,26 %

## 10.14

Merkitään ruokahävikin määrää alussa kirjaimella  $a$  ja vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Hävikin määrä tulee joka vuosi  $q$  -kertaiseksi, joten kolmen vuoden päästä määrä on  $q^3 \cdot a$ .

Tavoitteena on, että ruokahävikin määrä vähenee kolmessa vuodessa 40 %. Määrän tulee siis olla 60 % lähtötasosta  $a$  eli  $0,6a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^3 \cdot a = 0,6a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx 0,843$$

Ruokahävikin määrä tulee joka vuosi 0,843 -kertaiseksi, joten määrä on aina 84,3 % edellisen vuoden määrästä.

Ruokahävikin vuosittaisen vähentämistavoitteen tulee olla  
 $100 \% - 84,3 \% = 15,7 \%$ .

**Vastaus**

15,7 %

## 10.15

Merkitään ostovoimaa alussa kirjaimella  $a$  ja vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Hinnat tulivat joka vuosi  $q$  -kertaiseksi, joten neljän vuoden jälkeen hinnat olivat  $q^4 \cdot a$ .

Hinnat nousivat neljässä vuodessa 20 %. Hinnat neljän vuoden jälkeen olivat siis 120 % lähtötasosta  $a$  eli  $1,2a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^4 \cdot a = 1,2a$$

Ratkaistaan muuttuja  $q$   
CAS-laskimella.

$$q \approx -1,047 \quad \text{tai} \quad q \approx 1,047$$

Muutoskerroin on positiivinen luku, joten  $q \approx 1,047$ .

Hinnat tulivat joka vuosi 1,047 -kertaiseksi, joten ne olivat aina 104,7 % edellisen vuoden määrästä.

Hinnat nousivat vuodessa keskimäärin  $104,7 \% - 100 \% = 4,7 \%$ , eli vuotuinen inflaatioprosentti oli 4,7 %.

### Vastaus

4,7 %

## 10.16

- a) Merkitään alkuperäistä hintaindeksiä kirjaimella  $a$ . Hintaindeksi on viiden vuoden jälkeen

$$1,026 \cdot 1,041 \cdot 1,094 \cdot 1,110 \cdot 1,162 \cdot a = 1,5071 \dots \cdot a \approx 1,507a.$$

Hinnat ovat kasvaneet  $1,507$ -kertaisiksi, eli ne ovat nousseet  $50,7\%$ .

- b) Merkitään vuosittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Hinnat tulivat joka vuosi  $q$ -kertaiseksi, joten viiden vuoden jälkeen hintaindeksi oli  $q^5 \cdot a$ .

Toisaalta hintaindeksi oli a-kohdan perusteella viiden vuoden jälkeen  $1,507a$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^5 \cdot a = 1,507a$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$q \approx 1,085$$

Hinnat tulevat joka vuosi  $1,085$ -kertaisiksi, joten ne ovat vuoden lopussa  $108,5\%$  edellisen vuoden lopun hinnoista.

Hinnat nousivat vuosittain keskimäärin  $108,5\% - 100\% = 8,5\%$ , eli keskimääräinen vuotuinen inflaatioprosentti oli  $8,5\%$ .

### Vastaus

- a)  $50,7\%$   
b)  $8,5\%$

## 10.17

Merkitään muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Laskeuman aktiivisuus siis tulee joka vuosi  $q$ -kertaiseksi.

Vuonna 1987 laskeuman aktiivisuus oli  $78 \text{ kBq/m}^2$  ja vuonna 2006, eli 19 vuoden jälkeen, aktiivisuus oli  $q^{19} \cdot 78 \text{ kBq/m}^2$ .

Toisaalta vuonna 2006 aktiivisuus oli  $51 \text{ kBq/m}^2$ . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^{19} \cdot 78 = 51 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$q \approx 0,97789$$

Aktiivisuus tulee siis vuodessa  $0,97789$ -kertaiseksi.

Lasketaan laskeuman aktiivisuus vuonna 2021, eli 34 vuoden jälkeen.

$$q^{34} \cdot 78 \qquad \text{Sijoitetaan } q = 0,97789.$$
$$= 0,97789^{34} \cdot 78$$
$$\approx 36 \text{ (kBq/m}^2\text{)}$$

Laskeuman aktiivisuus oli  $36 \text{ kBq/m}^2$ .

### Vastaus

$$36 \text{ kBq/m}^2$$

## 10.18

- a) Merkitään kuukausittaista muutoskerrointa kirjaimella  $q$ . Osakkeen arvo siis tulee kuukaudessa  $q$  -kertaiseksi. Yhden vuosineljänneksen, eli kolmen kuukauden muutoksen kerroin on  $q^3$ .

Toisaalta 1. vuosineljänneksen aikana osakkeen arvo on kasvanut tammikuussa 10,7 %, helmikuussa 3,3 % ja maaliskuussa 1,0 %. Muutoksen kerroin on siis  $1,107 \cdot 1,033 \cdot 1,010$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^3 = 1,107 \cdot 1,033 \cdot 1,010 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx 1,049$$

Osakkeen arvo on siis noussut kuukausittain 1,049 -kertaiseksi, joten se on kuun lopussa 104,9 % edellisen kuukauden arvosta.

Osakkeen arvo nousi 1. vuosineljänneksen aikana keskimäärin  $104,9 \% - 100 \% = 4,9 \%$  kuukaudessa.

- b) 2. vuosineljänneksen aikana osakkeen arvo on kasvanut huhtikuussa 2,3 % ja toukokuussa 16,2 % ja laskenut kesäkuussa 18,5 %. Muutoksen kerroin on siis  $1,023 \cdot 1,162 \cdot 0,815$ .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $q$ .

$$q^3 = 1,023 \cdot 1,162 \cdot 0,815 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$q \approx 0,989$$

Osakkeen arvo on siis tullut kuukausittain 0,989 -kertaiseksi, joten se on kuun lopussa 98,9 % edellisen kuukauden arvosta.

Osakkeen arvo laski 2. vuosineljänneksen aikana keskimäärin  $100 \% - 98,9 \% = 1,1 \%$  kuukaudessa.

### Vastaus

- a) Luku 4,9 % saadaan ratkaisemalla muutoskerroin  $q$  yhtälöstä

$$q^3 = 1,107 \cdot 1,033 \cdot 1,010.$$

- b) Laski 1,1 %.